Mathe-AG
e-Funktion

Benedikt Brunner

September 2020

1 Exponenten

A) Normalerweise beschreibt der Exponent, wie oft man eine Zahl mit sich selbst multipliziert [1], es gibt aber auch Ausnahmen [2];[3]:

[1]
Mit sich selbst multiplizieren:

$$x^1 = x$$
$$x^2 = x * x$$
$$\Rrightarrow x^n = x * x * \cdots (n - mal) * x$$

[2]
Bei negativen Exponenten, teilt man 1 durch den positiven Exponenten:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$
$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$
$$\Rrightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

[3]
Bei Brüchen im Exponenten, zieht man (für eine Zahl $x^{\frac{m}{n}}$) die n-te Wurzel von x hoch m:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$
$$\Rrightarrow \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

[4]
Wenn der Exponent 0 ist, dann ist das Ergebnis immer 1 (Grenzfälle ausgenommen):

$$420^0 = 1$$
$$1337^0 = 1$$
$$0^0 = undefiniert$$

2 Funktionen

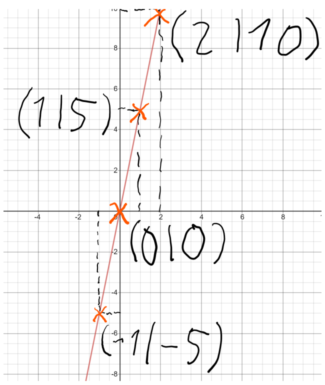
A) Eine Funktion ($f(x)$) ist eine Zuordnung von jedem Wert für x zu einem Wert von $f(x)$:

$$x_1 \Rrightarrow f(x_1)$$
$$x_2 \Rrightarrow f(x_2)$$
$$x_n \Rrightarrow f(x_n)$$
$$x \Rrightarrow f(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 5x$$
$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 5$$
$$f(100) = 500$$
$$f(-1) = -5$$

Funktionen lassen sich gut als Graphen in einem Koordinatensystem darstellen:



3 Ableitungen

A) Die Ableitung einer Funktion $f(x)$, $f'(x)$ beschreibt die Steigung von f am Punkt x:

$$f(x) = 3x^2$$
$$f(3) = 3 * 3^2 = 3 * 9 = 27$$
$$f'(x) = 3 * 2 * x = 6x$$
$$f'(3) = 18$$

Also ist die Steigung von $f(x)$ am Punkt $(3 \mid 27)$ gleich 18.

Regeln:

1.
Einfache Summanden, also Werte ohne die Variable nach der abgeleitet wird, vor denen nur ein $+$ oder ein $-$ stehen, fallen bei der Ableitung weg, da sie den Graphen nur nach oben oder unten verschieben und daher die Steigung nicht beeinflussen.

2.
Einfache Faktoren/Quotienten, also Werte ohne die Variable nach der abgeleitet wird, vor denen nur ein $*$ oder ein $/$ stehen, bleiben bei der Ableitung unverändert, da die Funktion durch sie nur gestreckt oder gestaucht wird und die Ableitung sich dadurch genauso verändert.

3.
Der Exponent der Variablen, nach der abgeleitet wird, verhält sich bei der Ableitung allgemein so, dass man mit ihm multipliziert und ihn dann um 1 vermindert :

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3 * x^2$$

4.
Summenregel: Die Ableitung der Summe zweier Funktionen ist gleich der Summe der Ableitungen der beiden Funktionen:

$$(f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'$$

5.
Produktregel: Die Ableitung des Produkts zweier Funktionen ist gleich der Summe der Produkte von jeweils der Ableitung der einen Funktion und der anderen Funktion:

$$(f(x) * g(x))' = f(x)' * g(x) + g(x)' * f(x)$$

6.
<u>Quotientenregel:</u> Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen ist gleich dem Produkt der Ableitung des Dividenden mal dem Divisor minus der Ableitung des Divisors mal dem Dividenden alles geteilt durch den Divisor zum Quadrat:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x}\right)' = \frac{f(x)' * g(x) - g(x)' * f(x)}{[g(x)]^2}$$

7.
<u>Kettenregel:</u> Die Ableitung zweier verketteter Funktionen entspricht dem Produkt der Ableitung der inneren Funktion und der Ableitung der äußeren Funktion:

$$[f(g(x))]' = g'(x) * f'(g(x))$$

4 Fakultät

A) Die Fakultät einer Zahl n entspricht dem Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n und wächst schneller als jede andere Funktion:

$$n! = 1 * 2 * 3 * \cdots * (n-2) * (n-1) * n$$

Beispiele:

$$2! = 1 * 2 = 2$$

$$3! = 1 * 2 * 3 = 6$$

$$10! = 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 3628800$$

Es gibt einen Spezialfall:

$$0! = 1$$

5 Summen

A) Um lange Summen, die auf einem bestimmten Schema basieren, kompakter zu schreiben, kann man das <u>Sigma-/Summensymbol</u> verwenden.

[1]

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \Rrightarrow \sum_{k=0}^{4}(1+k)$$

[2]

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \Rrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(1+k)$$

Wenn man mit unendlichen Summen rechnet, hilft es oft mit partiellen Summen zu arbeiten, bei denen man anstatt bis unendlich bis m rechnet.

6 Die e-Funktion

A) Bei Ableitung einer Exponentialfunktion erhält man erneut eine Exponentialfunktion, die der Startfunktion entspricht, nur um einen Faktor k multipliziert:

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = k * a^x$$

Es gibt eine besondere Basis e, für die k=1 ist und damit die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die selbe Funktion ergibt:

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

Nebenbei, ist $e \approx 2.71828182846$.

7 Die e-Funktion als unendliche Summe

A) Wir betrachten nun diese unendliche Summe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Nun untersuchen wir die partielle Summe bis m:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}$$

Nun leitet man die Funktion ab:

$$f'(x) = 0 + 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{m-3}}{(m-3)!} + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{m-3}}{(m-3)!} + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$$

Ersetzt man nun n durch k mit $k = n - 1$ so erhält man:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{m-2}}{(m-2)!} + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{x^m}{m!}$$

Damit ist $f(x) = f'(x)$ also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e$$